



随着  $x$  的变化,则点  $P$  的电场强度如何变化?

**处理方法** 此探究问题只要将示例 1 结论中的  $L$  换成  $x$  即可。即

$$E = \frac{kQx}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}} = kQ \cdot x \cdot (R^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

但是,由于数学知识不完备,其规律不能直观展现。

**探究问题 2** 若  $P$  点与环心  $O$  的距离  $OP = x$ , 随着  $x$  的变化,则点  $P$  的电势又如何变化?

**处理方法** 仿照例 1 运用微元的思想,设想将圆环等分为  $n$  个小段,当  $n$  相当大时,每一小段都可以看成点电荷,其所带电荷量为  $q = Q/n$ ,可知点电荷  $q$  在  $P$  点处的电势为

$$\Delta\varphi_P = \frac{kq}{r} = \frac{kq}{\sqrt{R^2+x^2}} = kq \cdot (R^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

又因为电势是标量,故可得整个圆环在  $P$  点处总的电势为

$$\varphi_P = kQ \cdot (R^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

但同样由于数学知识不完备,其规律不能直观展现。

2. 两个同轴放置的绝缘均匀带电圆环中轴线上的场强与电势分布问题

**例 2** 如图 2 所示,两个相同的绝缘细圆环带有等量正电荷,电荷在圆环上的分布是均匀的,两圆环相隔一定距离同轴平行固定放置,  $B$ 、 $D$  分别为两环圆心,  $C$  为  $BD$  中点。一带负电的粒子从很远处沿轴线向下依次穿过两环,若粒子只受电场力作用,则在粒子运动过程中下列说法正确的是 ( )

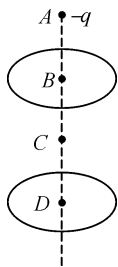


图 2

- A. 粒子经过  $B$  点时加速度为零
- B. 粒子经过  $B$  点和  $C$  点时动能相等
- C. 粒子从  $A$  到  $C$  的过程中,电势能一直增大
- D. 粒子从  $B$  到  $D$  的过程中,电场力做的总功为 0

**处理方法** 两个相同的绝缘细圆环带有等量正电荷,电荷在圆环上的分布是均匀的,所以两个圆环产生的合电场关于  $C$  点是对称的,结合矢量合成的方法可得  $C$  点的合场强为零,而  $B$  点的合场强方向竖直向上,  $D$  点的合场强方向竖直向下,所以粒子在  $B$  点加速度不为零, A 错;由合电场关于  $C$  点对称可知,粒子从  $B$  到  $C$  与从  $C$  到  $D$  电场力

做功的绝对值大小相等,总功等于零,所以粒子经过  $B$  点与经过  $D$  点时的动能相等,故 D 正确;粒子从  $A$  到  $B$  的过程中,受到的电场力的方向向下,电场力做正功,电势能减小, C 错误。选项 B 呢?

**探究问题 3** 例 2 的 B 与 C 选项中,粒子从  $B$  点到  $C$  点过程中动能如何变化? 电势能如何变化呢?

**探究问题 4** 两圆环连心线之间电势大小如何变化? 电势的极值点有几个?

这需要弄清两个相互平行共轴放置的同种绝缘细圆环中轴线上电场强度大小如何变化及合场强何处为零。

## 二、问题提炼

上述四个探究问题实际上可以归结为一个核心问题:半径为  $R$  的均匀带电绝缘细圆环中轴线上的电场与电势的分布规律。

下面从最简单的情形开始探讨。

1. 单个带电圆环中轴线上的场强表达式及图像

(1) 中轴线上电场强度表达式为  $E = kQ \cdot x \cdot (R^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ ,初步分析,有

① 若  $x \gg R$ ,则  $E = kQ \cdot x^{-2}$ ,可把带电圆环看成点电荷。在无穷远处  $E = 0$ 。

② 若  $x = 0$ ,则  $E = 0$ ,即环心处的电场强度为零。

③ 由  $\frac{dE}{dx} = 0$ ,可得电场强度有最大值的位置: $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}R$ 。

(2) 查阅资料可得中轴线上  $E-x$  参考图像(以绝缘均匀带正电荷的圆环圆心为坐标原点,向右方向为正方向)如图 3。

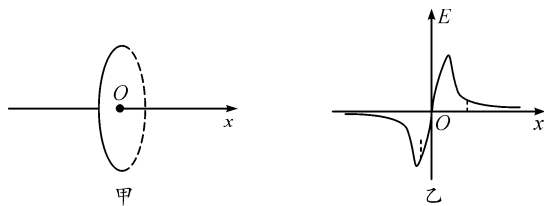


图 3

2. 两个同轴放置的绝缘均匀同种带电圆环之间中轴线上的场强表达式及图像

(1) 两圆环间中轴线上合场强表达式为  $E =$

$$\frac{kQx}{\sqrt{(x^2+R^2)^3}} - \frac{kQ(L-x)}{\sqrt{[(L-x)^2+R^2]^3}}$$

(2)中轴线上  $E-x$  图像(以圆环圆心为坐标原点,向右方向为正方向)如图 4。

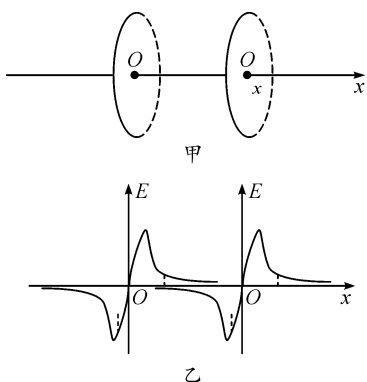


图 4

(3)猜想:根据图 4 可知,当两环逐渐靠近时,两者圆心连线上电场强度为零的点可能有一个,也可能有三个。

(4)手绘图像进行推理:将图像进行处理,将横轴下方的图像翻转 180°“转到”横轴上方,用纵坐标数值反映场强的大小,用“实线”表示方向向右,“虚线”表示方向向左,当两环靠近时示意图如图 5。图上“虚实线”相交的点即为合场强为“零”的点。由图 5 可知:两纵轴之间的“交点”个数有 1 个或 3 个两种可能。

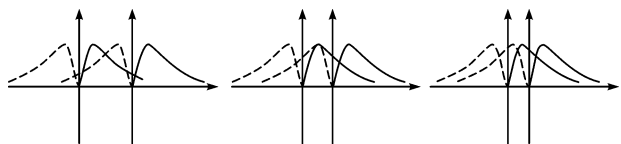


图 5

### 三、Desmos 验证

图 5 毕竟是手绘图像,随意性较大,此外,资料上的图像是否精确可靠也不肯定。为了得到肯定的答案,可以借助 Desmos 来进行验证。首先,对单个带电圆环中轴线上电场强度函数表达式简化处理为

$$y = x \cdot (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(1)Desmos 程序处理 1。均匀带正电圆环中轴线上电场强度分布情形(正值表示电场强度方向水平向右),如图 6。

由图 6 可见,资料上的图形与真实图形大体相像,但不够精确。

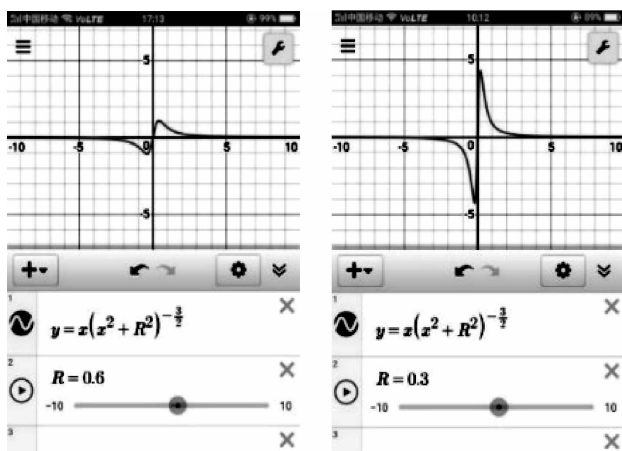


图 6

(2)Desmos 程序处理 2。两个相互平行共轴放置的同样绝缘均匀带正电圆环中轴线上电场强度叠加情形(实线图像正值表示场强方向水平向右,虚线图像正值表示场强方向水平向左),如图 7。

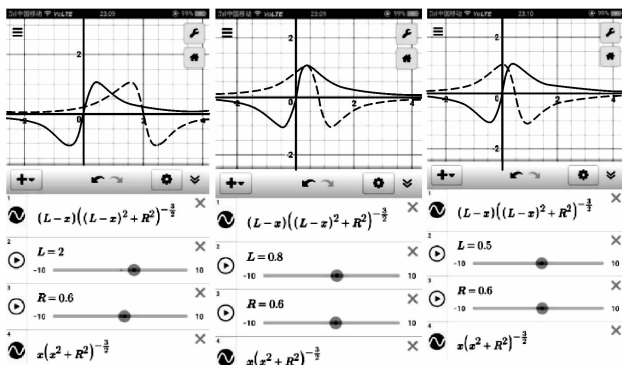


图 7

两个函数同时呈现,交叉点即为合场强为零的点。交叉点的位置即为合场强为零的位置,交叉点的个数即为合场强为零的个数。

(3)Desmos 程序处理 3。两个相互平行共轴放置的同样绝缘均匀带正电圆环中轴线上电场强度大小叠加情形(都为正值,方便观察重叠部分是否可以抵消),如图 8。

与先前“手绘图像进行推理”的结果完全一样,但更有说服力。

(4)Desmos 程序处理 4。求解中轴线上合场强为零的位置。

合场强为零满足  $x \cdot [(L-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}} = (L-x) \cdot (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}$ ,其中  $x \in [0, L]$ ,  $L, R$  为常数。求  $x$  的解的个数。

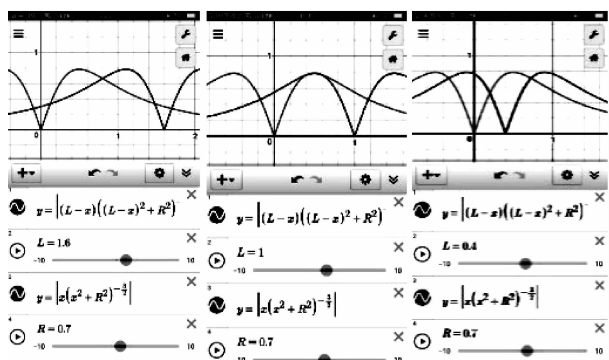


图 8

图 9 中“虚线”对应的位置即为合场强为零的位置。虚线的“条数”即为合场强为零的位置的“个数”。

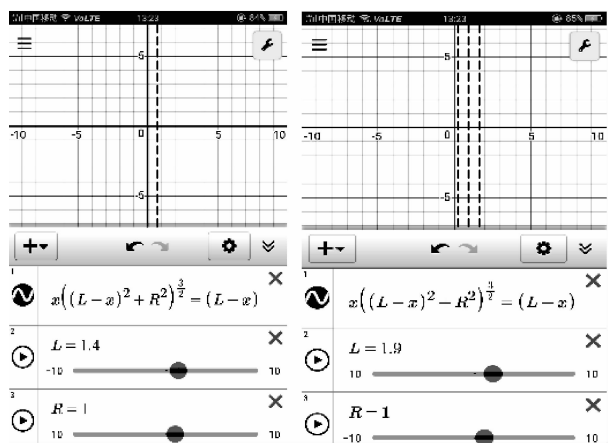


图 9

(5) Desmos 程序处理 5。求解两个同种均匀带正电圆环中轴线上电势叠加后总电势极值点个数及出现位置。

以简化的函数  $y = (x^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} + [(L-x)^2 + R^2]^{-\frac{1}{2}}$  来处理,如图 10 所示。

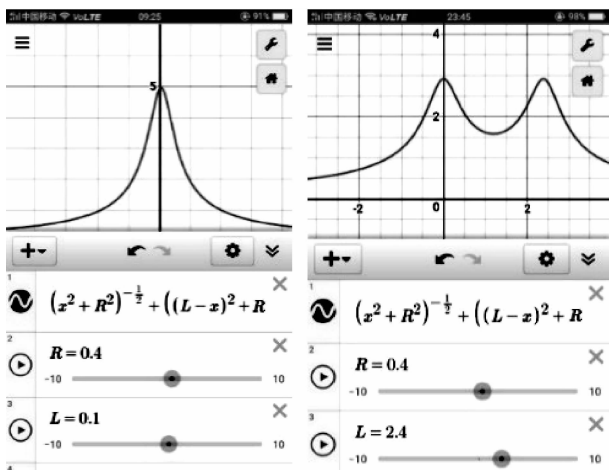


图 10

由图 10 可以看出,随着两圆环之间的距离  $L$  的不同,两圆环之间的电势的极值点个数也不同。每个电势的极值点位置都对应着合场强为零的位置。

(6) 电势极值点的位置与合场强为零的位置的对应,如图 11 所示。

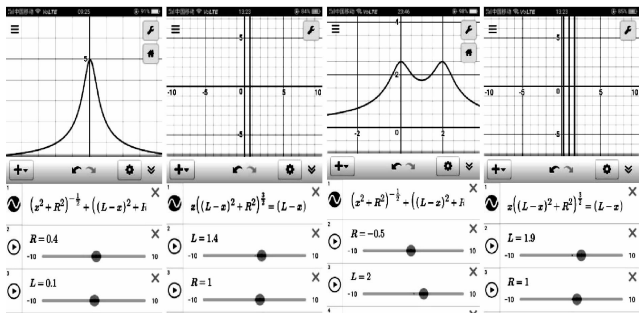


图 11

#### 四、例题中“疑惑”的解析

由以上 Desmos 验证的结果,对于例 1 可以用函数图像直观展现圆环中轴线上电场强度与电势的分布规律。对于例 2 中的 B、C 选项,由于不知两圆环之间的距离  $L$  与圆环半径  $R$  的大小关系,粒子从  $B$  点运动  $C$  点的过程中,经历的过程有两种可能:

(1) 一直加速运动,到达  $C$  点时速度最大,动能最大,电势能最小; $B$  点动能小于  $C$  点动能。(此过程中只有一个合场强为零的点,即  $C$  点)

(2) 先加速运动,速度增大,动能增大,电势能减小;然后受到的电场力反向,做减速运动,动能减小,电势能增大。越过  $C$  点后,粒子受到的电场力再次反向。在圆环半径  $R$  大小一定时, $B$ 、 $C$  两点的动能的大小关系与圆环之间的距离  $L$  有关。(此过程中有三个合场强为零的点,除  $C$  点外,在  $C$  点两侧与两圆环圆心之间还各有一点,这两点关于  $C$  点对称)

总之,不管是哪种情形,例 2 中 B、C 选项均不正确。

#### 参考文献

- [1] 张大同. (创新班和理科班用) 物理(高中下册)[M]. 上海:上海教育出版社,2018:56-57.
- [2] 杨榕楠. 更高更妙的物理[M]. 杭州:浙江大学出版社,2013:203-208.
- [3] 朱国强. 高中物理培优基础教程[M]. 杭州:浙江大学出版社,2010:230-234.